参赛队员：夏铭辰

学校：鞍山市第一中学

省 份 ： 辽 宁 省

指导教师：张继红

论 文 题 目 ： 拓 扑 和 的 推 广

论文题目：拓扑和的推广

摘要：

拓扑学中，一些定理有下述形式：**A**、**B** 是拓扑空间 **X** 的两个子空间，**A**、**B** 满足某些条件，则 **X** 具有某性质。本文的目的在于研究处理这类问题的一般方法。我们将通过推广拓扑和的概念来实现这个目的。

Subject：the Generalization of the Topological Sum

Abstract:

There’re some theorems of this form in topology:A、B are two subspaces of a topological space X.A and B satisfy some conditions,then X has some property.In this thesis,we aim to study the general method of solving this kind of problems.We shall make it by generalizing the aspect of topological sum.

拓扑和的推广

请注意：本文中正则性、正规性均强于 Hausdorff 条件。

首先给出参考文献【2】中拓扑和的定义：

设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$是两两无交的空间族. 在集合$X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$上定义如下拓扑：$X$的子集$O$是$X$的开集当且仅当对于每一$\alpha\in I$，$O\cap X_\alpha$是$X_\alpha$的开集. 赋予了上述拓扑的空间$X$称作$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$的拓扑和.

易见，此定义有以下不足：要求空间族无交，适用范围太小；一个以上非空空间的和不连通。

我们的推广从一个引理开始。

引理 1：$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$**是拓扑空间族，若**

a. $\forall\alpha\in I$，**只有有限个**$\beta\in I$，**使得**$X_\alpha\cap X_\beta\neq\varnothing$.

b. $\forall\alpha,\ \beta\in I$，$X_\alpha\cap X_\beta$**是**$X_\alpha$**的闭子集，且从**$X_\alpha$**、**$X_\beta$**中诱导相同的拓扑.**

则$\mathrm{X}=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$上存在唯一的拓扑，使得

a. $\forall\alpha\in I$，X_α是X的闭子空间.

b. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$局部有限.

证：我们定义X上的拓扑：A 是 X 的闭集当且仅当$\forall\alpha\in I$，$X_\alpha\cap A$是X_α的闭子集。由条件 a、b，X的一个子集 A 是闭的当且仅当它可表示为$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，其中$A_\alpha$是$X_\alpha$的闭子集。

结论 a 显然成立。我们验证结论 b：设$x\in X_\alpha$，令N表示与X_α无交的空间之并，$U=X-N$，由条件 a，它仅和有限个X_α有交。

下面验证唯一性：用Y、Z表示赋予两种满足 a，b 结论拓扑的集合X，显然$id:X_\alpha\to X_\alpha$是连续的，由结论 b，X 上的恒同映射$id:Y\to Z$连续。同理$id^{-1}:Z\to Y$连续，故 id 是Y、Z间的同胚。它是恒同映射，因此这两个拓扑相等。 ■

由此，我们可以轻易地推广拓扑和。

定义 1：相容性：满足引理 1 中条件 a，b 的空间族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$称为相容空间族。

定义 2：拓扑和：$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$是相容空间族，我们称赋予了满足引理中结论 a，b 的拓扑的空间 $X=\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ 为$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$的拓扑和.记为 $X=\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ .I 有限时（设为{1,2,⋯,n}）我们也记 $X=X_1\oplus\cdots\oplus X_n$.空间族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$称为 X 的一个拓扑和分拆.

显然，这是前文中拓扑和概念的推广。

我们先给出两个基本性质：

1、 相容空间族的有限拓扑和可随意加括号.

2、 相容空间族的拓扑和可以将指标集分割为两个无交子集之并后，分别取和再作和.即 $I=J\cup K, J\cap K=\varnothing$，则 $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha=(\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha)\oplus(\bigoplus_{\alpha\in K} X_\alpha)$.

这些只是引理 1 中唯一性的简单推论。

从现在起，我们始终**假定$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$是给定的相容空间族**，且 $X=\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$。不致引起混淆时我们也省略指标的取值范围(默认为 I)，例如将前式记为 $X=\oplus X_\alpha$。

我们指出，我们的记号事实上是有缺陷的，毕竟拓扑和依赖于 X_α 上的拓扑，但本文中，它们都不致引起歧义，因此我们选择继续采用这种记号。另外，我们称一个问题是局域的，如果它涉及空间的拓扑和拆分。

下面将进入本文的主体：我们将研究一些拓扑学概念的局域表述。

1、 闭集

引理 2： A 是 X 的闭子集当且仅当 $A=\bigcup A_\alpha$，其中 A_α 是 X_α 的闭子集.

引理 3： A 是 X 的闭子集当且仅当$\forall\alpha$，$X_\alpha\cap A$ 是 X_α 的闭子集.

2、 开集

引理 4： U 是 X 的开子集当且仅当$\forall\alpha$，$U\cap X_\alpha$ 是 X_α 的开子集.

这是 X 关于$\{X_\alpha\}$有弱拓扑的直接推论。

引理 5: 若 x 只属于唯一一个 X_α，则存在 x 在 X 中的邻域 U，满足$\forall\beta\neq\alpha$，U 与 X_β 无交.

推论 1：若$\{X_\alpha\}$中，x 仅属于指标属于 J 的 X_α，则存在 x 在 X 中的邻域 U，使得$\forall\beta\in I-J$，$U\cap X_\beta=\varnothing$.

另外，本文中将用到下述简单结论：$\mathrm{I}=\{1,2\}$，则 X_1-X_2 是 X 中的开集。

3、　子空间

引理 6：$Y \subset X$，**则**$\{X_\alpha \cap Y\}$**相容，且**Y**取从**X**诱导的拓扑时，** $Y = \oplus(X_\alpha \cap Y)$。

证：相容性显然，又$X_\alpha \cap Y$显然是Y的闭子空间及$\{X_\alpha \cap Y\}$局部有限，由引理 1 的唯一性即得。 ■

4、　（有限）积空间

下述引理中α、β不必取自同一指标集。

引理 7：$\{X_\alpha\}$、$\{Y_\beta\}$**分别相容，则**$\{X_\alpha \times Y_\beta\}$**相容，且**$\oplus(X_\alpha \times Y_\beta) = \oplus X_\alpha \times \oplus Y_\beta$。

证明类似前一引理，不赘述。

5、　连续函数

引理 8：函数$f: X \to Y$**连续当且仅当**$\forall \alpha$，$f|_{X_\alpha}$**连续**

6、　分离公理

定理 1：空间X**满足**T_i**公理当且仅当**$\forall \alpha$，X_α**满足**T_i**公理。（i=1,2,3）**

证：T_1公理：显然

Hausdorff 公理：先考虑有限的情形，由基本性质 1，不妨令$I = \{1, 2\}$，令 $x, y \in X$.

1、x，y 均不属于$X_1 \cap X_2$，且 x,y 分别属于两个集合：引理 5

2、x，y 均不属于$X_1 \cap X_2$，且 x,y 属于同一集合：不妨设是X_2，$X_2 - X_1$是X的开子空间，也是X_2的子空间，因而是 Hausdorff 的，在$X_2 - X_1$中取无交邻域即可。

3、x，y 属于同一空间，有且只有一个属于$X_1 \cap X_2$：设$x \in X_1 - X_2$，$y \in X_1 \cap X_2$，在X_1中取 x，y 的无交邻域，记为U、V，令$W_1 = U \cap (X_1 - X_2)$，取 y 在X_2中的邻域W，使得$W \cap X_2 = V \cap X_2$，$W_2 = X - (X_1 - V) \cup (X_2 - W)$，$W_1$、$W_2$即为 x，y 无交邻域。

4、x，y 都属于$X_1 \cap X_2$

取 x，y 在X_i中的无交邻域U_i、V_i（i=1,2）令

$U = X - (X_1 - U_1) \cup (X_2 - U_2)$, $V = X - (X_1 - V_1) \cup (X_2 - V_2)$

于是$U=(U_1\cap(X_1-X_2))\cup(U_1\cap U_2)\cup(U_2\cap(X_2-X_1))$,

$V=(V_1\cap(X_1-X_2))\cup(V_1\cap V_2)\cup(V_2\cap(X_2-X_1))$

我们断言 U、V 无交。若$z\in V$，则

a. $z\in V_1\cap(X_1-X_2)$, 此时因$U_1\cap V_1=\varnothing$, $(X_1-X_2)\cap(X_2-X_1)=\varnothing$,得$z\notin U$.

b. $z\in V_2\cap(X_2-X_1)$，同上.

c. $z\in V_1\cap V_2$，有$U_1\cap V_1=\varnothing$，$U_2\cap V_2=\varnothing$即得.

因此$U\cap V=\varnothing$.

显然$x\in U$，$y\in V$，且U、V都是开集。因此X是 Hausdorff 空间。

下面考虑一般情形，对$x,y\in X$，先取它们各自的仅和有限个X_α有交的邻域，先由基本性质 2、该命题有限情形及引理 5 即得。

正则公理：设$x\in X$，V是 x 的邻域。取 x 的邻域W仅与有限个X_α有交，设为$X_1,\cdots,X_n$，若 x 在X_i中，取 x 的邻域U_i，满足$\overline{U_i}\subset V\cap X_i$，否则取$U_i$为空集。令$U=W-\bigcup_{i=1}^{n}(X_i-U_i)$，则$U$为 x 的邻域且$\overline{U}\subset V$。再由本命题中$T_1$公理部分即得. ■

可以看到拓扑和对T_1公理、Hausdorff 公理、正则公理有着很好的表现，但正规空间的情况似乎较为复杂，我未能给出它的局域的充要表述，但稍后几个附带各种紧致性的充分条件将显然地得出。

7、 覆盖性质

该部分内容是本文的核心，不久我们会看到这是研究仿紧致的局部紧致 Hausdorff 空间的好方法。

定理 2：X是仿紧致的局部紧致空间当且仅当X存在一个拓扑和分拆$X=\oplus X_\alpha$，使得$\forall\alpha$，X_α是紧致的.

证：充分性：设每个X_α紧致，且$\{A_\beta\}_{\beta\in K}$是X的一个开覆盖。则对给定的α，$\{A_\beta\cap X_\alpha\}_{\beta\in K}$是$X_\alpha$的开覆盖，取其中有限个覆盖$X_\alpha$，记作$A_{\alpha1},\cdots,A_{\alpha m_\alpha}$。设与$X_\alpha$有交的$\{X_\alpha\}$中的集合为$X_1,\cdots,X_n$。不妨设$A_{\alpha1},\cdots,A_{\alpha m_\alpha}$也仅和$X_1,\cdots,X_n$有交（否

则，用每个$A_{\alpha i}$减去多余的X_α）。对每个$\alpha\in I$这样，得到$A_{\alpha i}$的族。令$x\in X$，可取其邻域U仅和$X_1,\cdots,X_n$有交，而任一X_i仅和该族中有限个$A_{\alpha i}$有交，因此该集族局部有限，因此X是仿紧致的。显然$\overline{U}$紧致，因此X也是局部紧致的。

必要性：对于X中的每个点x，取一个邻域U_x，使得$\overline{U_x}$紧致，则$\{U_x\}_{x\in X}$构成X的开覆盖，取它的局部有限开加细$\{A_\beta\}_{\beta\in J}$。我们断言$X=\bigoplus_{\beta\in J}\overline{A_\beta}$。

显然，$\{\overline{A_\beta}\}_{\beta\in J}$相容，因为$\{A_\beta\}_{\beta\in J}$的局部有限性蕴含$\{\overline{A_\beta}\}_{\beta\in J}$的局部有限性。显然有$\overline{A_\beta}$是$X$的闭子集，由拓扑和的唯一性即得证。 ■

自然我们的证明可以由紧致空间轻松地推广到 Lindelöf 空间，然而我们选择稍后证明（附带 Hausdorff 公理的）更强的结果。

定理 3：空间 X 是仿紧致的 Hausdorff 空间当且仅当任一 X_α 是仿紧致的 Hausdorff 空间.

证：必要性显然.

充分性：设$\{U_\beta\}_{\beta\in J}$是X的开覆盖，则对给定的α，$\{X_\alpha\cap U_\beta\}_{\beta\in J}$是$X_\alpha$的开覆盖，令$\{A_{\alpha\gamma}\}_{\gamma\in K}$为局部有限闭加细且覆盖$X_\alpha$（Michael 定理），对每个$\alpha$这样取。我们断言$\{A_{\alpha\gamma}\}_{\alpha\in I,\gamma\in K}$是$\{U_\beta\}_{\beta\in J}$的局部有限闭加细。

设$x\in X$，取 x 的邻域U仅和有限个X_α有交，记为$X_1,\cdots,X_n$，取 x 在X_i中的邻域U_i，满足仅和有限个$A_{i\gamma}$有交，令$W=U-\bigcup_{i=1}^{n}(X_i-U_i)$，则显然$W$仅和有限个$A_{i\gamma}$有交。 ■

定义 3：空间 X 称为局部 Lindelöf 的，如果 $\forall x\in X$，存在 x 的一个邻域 U，使得 $\overline{U}$ 是 Lindelöf 空间.

推论 2：X 是局部 Lindelöf 的 Hausdorff 空间当且仅当存在 X 的一个拓扑和分拆 $X=\oplus X_\alpha$，使得任一 X_α 是正则的 Lindelöf 空间.

定理 4：空间 X 是局部紧致的当且仅当任一 X_α 是局部紧致的.

证：必要性显然.

充分性：设$x\in X$，取 x 的邻域U仅和有限个X_α有交，记为$X_1,\cdots,X_n$，取 x 在X_i

中的邻域U_i，使得$\overline{U_i}$紧致，令$W=U-\bigcup_{i=1}^{n}(X_i-U_i)$，则$W$是 x 的有紧致闭包的邻域。■

容易观察到，定理 3、4 的证明末尾采用了相同的构造开集的方法，事实上，这不依赖于空间的覆盖性质，它可以被提炼为对一类性质的定理，对此的研究超出了本文的范围，我们略去。

现在可以看出，尽管正规性在并空间下可能不能很好地保持，但只要将它加强为正则的 Lindelöf 空间或是仿紧致的 Hausdorff 空间，则正规性可以遗传。

8、 连通性

引理 9： X **不连通当且仅当存在** X **的一个拓扑和分拆** $X=\oplus X_\alpha$（$|I|\geq 2$），**满足**

a. 每个 X_α **连通.**

b. 任意两个不同的项无交.

c. 任一 X_α **非空**

我们指出，应用该引理可以证明有关连通性的一些定理，但它们过于简单，我不拟列入本文中。

9、 度量性质

这里我们要用到一条引理，它来自参考文献【1】，我们用现在的语言将它叙述为：

引理 10：$\{X_1, X_2\}$**是可度量化的相容紧致空间族，则** $X=X_1\oplus X_2$ **可度量化。**

定理 5： X **是可度量化的局部紧致空间当且仅当每一个** X_α **是可度量化得局部紧致空间。**

证：必要性显然。

充分性：有 Smirnov 定理，每个X_α是仿紧致的 Hausdorff 空间，因此X也是。

只需证明X局部可度量化。

先考虑有限情形，不妨设 I={1,2}。设X_1、X_2都是局部可度量化的局部紧致空间。

取$x\in X_1\cup X_2$，取 x 在X_i中的邻域U_i，使$\overline{U_i}$紧致、可度量化，则$\overline{U_1\cup U_2}=\overline{U_1}\oplus\overline{U_2}$可度量化（引理 10）。令$W=X-(X_1-U_1)\cup(X_2-U_2)$，显然$W$是 x 的邻域且$W\subset\overline{U_1\cup U_2}$，因此$W$可度量化，因此$X$局部可度量化。

对一般情形，证明与定理 3 证明末尾类似，不赘述。■

我们来用本文的方法研究一类特殊的空间。

定义：空间 X **称为半紧空间，如果** X **是仿紧致的局部紧致的 Hausdorff 空间。**

下面是它的一些可以用本文方法简单证明的性质。

请注意：一个映射称为**紧映射**如果它是连续满射，且单点集的原像是紧致的；一个映射称为**保持局部有限性**，若任一局部有限集族的像是局部有限的。

1、 一个空间是半紧空间当且仅当它可以被拆分为紧致 Hausdorff 空间的拓扑和.

2、 完备映射保持半紧性.

3、 f 是半紧空间到 Hausdorff 空间的紧映射，则 f 完备当且仅当 f 保持局部有限性。

4、（Gale）一个空间是半紧空间的商空间当且仅当它是紧致生成的 Hausdorff 空间.

性质 1 是定理 1、2 的直接推论，下面 3 条性质可以由性质 1 及紧致空间的对应性质显然证明。这里我们只以性质 2 为例证明：

下述定理是显然的：**完备映射保持紧性.**(事实上，只需要连续满射)

对于 X 是半紧空间的情形，它可以被拆分为 $X = \oplus X_\alpha$，其中每个 X_α 都是紧致的，而且完备映射保持局部有限性，故得证（Hausdorff 性质显然）。

该例子说明了拓扑和使用的一种方式，它可以轻易地推广现有定理。然而当我尝试着处理 Bkouche 定理时我遇到了一些困难，因此本文的研究选择在此终止。

最后我也要指出，本文的内容有两个看起来很有前途的发展方向：

1、代数拓扑：van Kampen 定理的成功暗示着这需要引入开拓扑和（即要求每个 X_α 是开的而不是闭的）或未必开或闭的子集族的拓扑和，我在进行类似研究时在分离公理方面遇到了困难，但看起来它是一个很好的课题。

2、性质范畴：注意所有集合与集合的任一子集族（称为性质）的有序对在适当的态射下构成一个范畴，我们称之为性质范畴（可以仿照拓扑的定义设置态射，但这不唯一）。易见使用性质范畴后，本文的一些定理可以脱离拓扑而被推广。

参考文献：

【1】J.R.Munkres,Topology

【2】林寿，度量空间与函数空间的拓扑